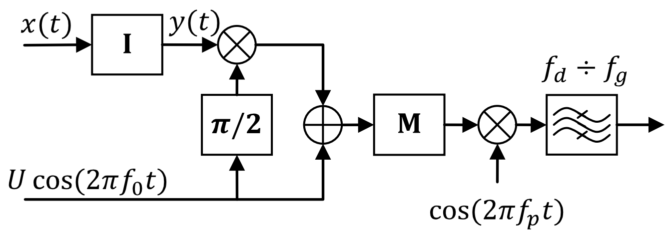
Analogne modulacije

Na slici 1. je prikazan indirektni Armstrongov modulator. Blok sa oznakom **I** predstavlja idealni integrator čija je relacija ulaz izlaz data izrazom: $y(t) = \frac{1}{\tau}\int x(t)dt$. Blok sa oznakom **M** predstavlja množač učestanosti. Konstanta množača $k_u = 0.4\ \mathrm{V}^{-1}$, učestanost $f_0 = 50$ kHz i amplituda $U = 2$ V. Modulišući signal je test ton amplitude $U_{\max} = 1$ V i učestanosti f_m koja se nalazi u opsegu od (20 Hz ÷ 20 kHz).

a) Odrediti konstantu τ idealnog integratora tako da indeks modulacije na izlazu sabirača bude manji od 0.2.

b) Odrediti red množača učestanosti M, učestanost pomoćnog nosioca f_p i granične učestanosti idealnog pojasnog filtra f_d i f_g, tako da se na izlazu sistema sa slike 1 dobije FM signal čija je učestanost nosioca $f_c = 100$ MHz, a maksimalna devijacija učestanosti $\Delta f = 20$ kHz. (Iskoristiti činjenicu da za malo x važi $x \approx \arctan x$).



Slika 1.

Rešenje

a) Modulišući signal je $x(t) = U_{\max}\cos(2\pi f_m t)$.

Signal na izlazu integratora je:

$$y(t) = \frac{1}{\tau}\int x(t)dt = \frac{U_{\max}}{2\pi f_m \tau}\sin(2\pi f_m t)$$

Signal na izlazu sabirača je

$$v(t) = U\cos(2\pi f_0 t) - k_u y(t) U \sin(2\pi f_0 t)$$

tako da je amplituda

$$U_v = U\sqrt{1 + k_u^2 y^2(t)}$$

a faza:

$$\phi_v = \arctan\big(k_u y(t)\big)$$

Po uslovu zadatka $\max|\phi_v|$ treba da bude 0.2 tj.

$$\max\left|\arctan\left(k_u \frac{U_{\max}}{2\pi f_m \tau}\sin(2\pi f_m t)\right)\right| = 0.2$$

odakle sledi da je

$$\tau = \frac{k_u U_{\max}}{2\pi f_{\min}\tan 0.2} = 15.7 \text{ ms}$$

b) Trenutna faza signala na izlazu sabirača data je izrazom:

$$\phi_v = \arctan\left(k_u \frac{U_{\max}}{2\pi f_m \tau}\sin(2\pi f_m t)\right)$$

Pošto je maksimalna devijacija faze mala, tada se gornji izraz može aproksimirati sa:

$$\phi_v \approx k_u \frac{U_{\max}}{2\pi f_m \tau}\sin(2\pi f_m t)$$

odakle sledi da je trenutna devijacija učestanosti:

$$f_d = \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi_v}{dt} \approx k_u \frac{U_{\max}}{2\pi\tau}\cos(2\pi f_m t)$$

tako da je maksimalna devijacija učestanosti na izlazu sabirača data izrazom:

$$\Delta f_v = k_u \frac{U_{\max}}{2\pi\tau} = f_{\min}\tan 0.2 = 4 \text{ Hz}$$

Red množača učestanosti je:

$$M = \frac{\Delta f}{\Delta f_v} = 5000$$

Učestanost nosioca na izlazu ima vrednost $f_c = |Mf_0 \pm f_p|$, te je tražena učestanost lokalnog nosioca $f_p = Mf_0 - f_c = 150$ MHz.

Širina značajnog dela spektra signala prema Carsonovom obrascu iznosi $B = 2(\Delta f + f_{\max}) = 80$ kHz, tako da su granične učestanosti pojasnog filtra: $f_d = 99.96$ MHz i $f_g = 100.04$ MHz.

Analiza signala i sistema

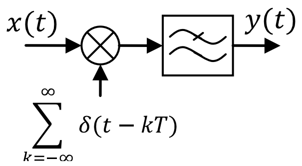
Na slici 1. je data blok šema sistema za odabiranje, na čijem se izlazu nalazi idealni NF filtar, granične učestanosti $f_g = 4$ kHz. Učestanost odabiranja u sistemu je $f_s = \frac{1}{T} = 8$ kHz.

a) Odrediti izlazni signal $y_1(t)$, ako je ulazni signal $x_1(t)$ definisan izrazom

$$x_1(t) = \frac{2\sin^2(0.5(f_2 - f_1)\pi t)\cos\big((f_2 + f_1)\pi t\big)}{(\pi t)^2}$$

gde je $f_1 = 4$ kHz, a $f_2 = 8$ kHz.

b) Nacrtati blok šemu i odrediti parametre sistema koji na osnovu signala $y(t)$ vrši reknostrukciju ulaznog signala $x(t)$. Smatrati da se spektar ulaznih signala razlikuje od 0 samo za učestanosti za koje se i spektar signala $x_1(t)$ iz dela zadatka pod a) razlikuje od nule.



Slika 1.

Rešenje

a) Signal $x_1(t)$ se može posmatrati kao proizvod dva signala tj:

$$x_1(t) = \frac{\sin^2(0.5(f_2 - f_1)\pi t)}{(\pi t)^2} \cdot 2\cos\big((f_2 + f_1)\pi t\big)$$

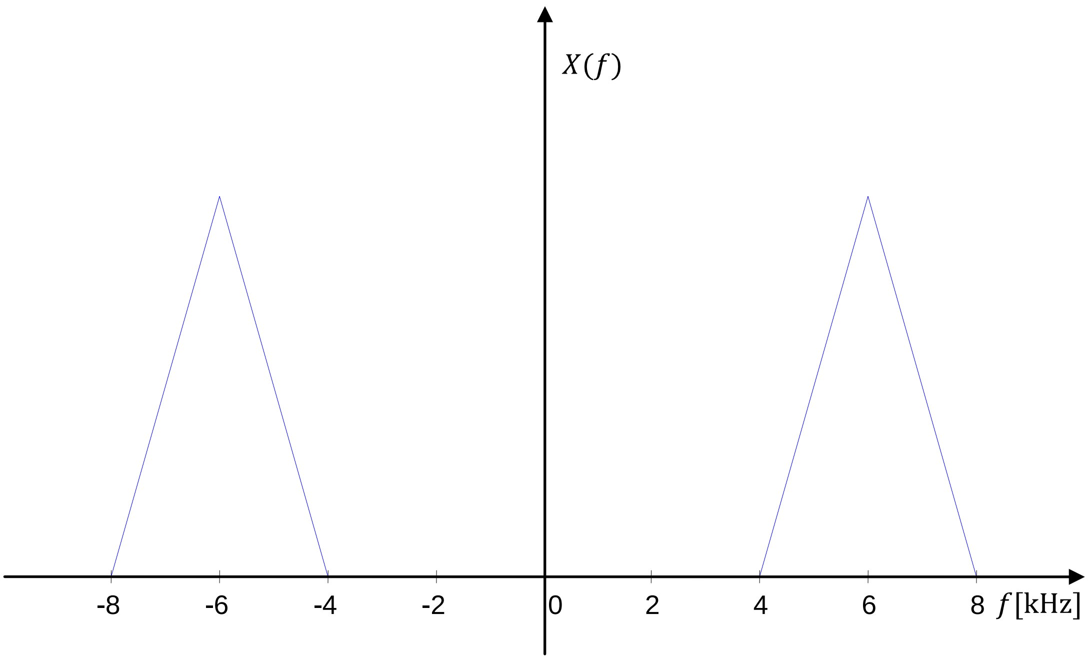
Prvi signal ($\frac{\sin^2(0.5(f_2-f_1)\pi t)}{(\pi t)^2}$) predstavlja IFT konvolucije 2 parne pravougaone funkcije širine $f_p = 0.5(f_2 - f_1)$ odnosno IFT funkcije

$$X_{1p}(f) = \begin{cases} f_p\left(1 - \dfrac{|f|}{f_p}\right) & |f| \le f_p \\ 0 & \text{drugde} \end{cases}$$

FT drugog signala ($2\cos\big((f_2 + f_1)\pi t\big)$) je

$$X_{2p}(f) = \delta\left(f - \frac{(f_2 + f_1)}{2}\right) + \delta\left(f + \frac{(f_2 + f_1)}{2}\right)$$

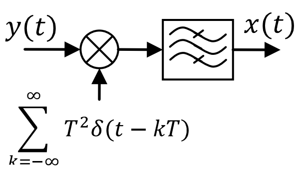
te je spektar signala $x_1(t)$ je $X_1(f) = X_{1p}(f - (f_2 + f_1)/2) + X_{1p}(f + (f_2 + f_1)/2)$ odnosno kao na donjoj slici.

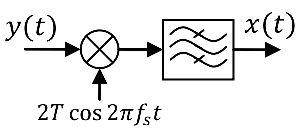


Na izlazu iz množača, spektar je definisan izrazom $V(f) = 1/T\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{1p}(f - kf_t + f_p)$ gde je $f_t = 4$ kHz.
Spektar na izlazu idealnog NF filtra je $Y_1(f) = \frac{1}{T}X_{1p}\big(f + f_p\big) + \frac{1}{T}X_{1p}\big(f - f_p\big)$,
a signal $y_1(t)$ po uzoru na signal $x_1(t)$

$$y_1(t) = \frac{16000\sin^2(2000\pi t)\cos(2000\pi t)}{(\pi t)^2}$$

b) U sistemu sa slike 1. komponente spektra ulaznog signala koje su se nalazile na opsegu učestanosti od $[-8\text{kHZ}, -4\text{kHz}]$ se transliraju na učestanosti $[0,\ 4\text{kHz}]$, a komponente na učestanostima $[4\text{kHz},\ 8\text{kHz}]$ se transliraju na učestanosti $[-4\text{kHz}, 0]$. Pored toga amplituda je povećana $1/T$ puta. Pri rekonstrukciji se mora voditi računa koji je bio gornji a koji donji bočni opseg pošto u opštem slučaju spektar ulaznog signala ne mora biti realan.





Rekonstrukcija podrazumeva suprotan proces, koji se može postići odabiranjem izlaznog signala $y(t)$ periodičnom povorkom delta impulsa periode T ponderisane faktorom T^2 ili množenjem sa kosinusoidom učestanosti f_s i amplitude $2T$, nakon čega, u obe varijante, sledi pojasni filtar koji propušta učestanosti između 4 kHz i 8 kHz.

Digitalne telekomunikacije

Predajnik emituje binarni frekvencijski modulisani digitalni signal, dobijen tzv. „tvrdim tastovanjem”:

$$s(t) = \sum_k A\cos(\omega_i t)\, h(t - kT)\,,\ i \in \{1,2\},$$

gde je A konstantna amplituda, ω_1 i ω_2 su noseće učestanosti, T je trajanje signalizacionog intervala, a $h(t)$ je impuls oblika:

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < T \\ 0 & \text{drugde} \end{cases}.$$

Izbor između ω_1 i ω_2 u svakom signalizacionom intervalu je podjednako verovatan i ne zavisi od prethodnih izbora.

Odrediti i skicirati spektralnu gustinu snage emitovanog digitalnog signala.

Rešenje

Emitovani digitalni signal se može predstaviti u obliku:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

gde su:

$$s_1(t) = \sum_k a_k \, A \cos(\omega_1 t) \, h(t - kT)$$

$$s_2(t) = \sum_k b_k \, A \, cos(\omega_2 t) \, h(t - kT)$$

pri čemu je a_k slučajna promenljiva sa vrednostima iz skupa {0,1}, sa podjednakim verovatnoćama izbora vrednosti, a b_k slučajna promenljiva određena sa $b_k = 1 - a_k$.
Pokazuje se da je spektralna gustina snage emitovanog signala:

$$S(f) = S_1(f) + S_2(f)$$

Signali $s_1(t)$ i $s_2(t)$ su amplitudski modulisani signali, čiji su modulišući signali binarni digitalni signali sa alfabetom {0,A} i elementarnim impulsom $h(t)$.

Dalje je:

$$S_1(f) = \frac{1}{4} S_m(f - f_1) + \frac{1}{4} S_m(f + f_1)$$

gde je $S_m(f)$ spektralna gustina snage modulišućeg signala:

$$S_m(f) = \frac{A^2}{4T} |H(f)|^2 + \frac{A^2}{4T^2} |H(f)|^2 \sum_k \delta(f - \frac{k}{T})$$

Spektralna gustine energije elementarnog impulsa $h(t)$ je:

$$|H(f)|^2 = \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f)^2}$$

pa je:

$$S_m(f) = \frac{A^2}{4T} \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f)^2} + \frac{A^2}{4} \delta(f)$$

jer impulsi $\delta(f - \frac{k}{T})$ odabiraju funkciju $|H(f)|^2$ u njenim nulama, osim za $k = 0$.

Na isti način se određuje i $S_2(f)$.

Skica se sastoji od četiri $(\sin x/x)^2$ funkcije i četiri delta impulsa, centriranim u $\pm f_1$ i $\pm f_2$.

Statistička teorija telekomunikacija

Dat je slučajan process $Y(t) = a \cdot \sin(\Omega t)$ čije su realizacije sinusoide amplitude a i učestanosti Ω. Učestanost Ω je kontinualna slučajna promenljiva nepoznate gustine raspodele verovatnoće - $\varphi_\Omega(\omega)$. Pokazati da je gustina raspodele prvog reda slučajnog procesa $Y(t)$ asimptotski data sa:

$$\varphi_{Y(t)}(y) \xrightarrow[t\to\infty]{} \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-y^2}} & , \quad |y| < a \\ 0 & , \quad |y| > a \end{cases}$$

bez obzira na konkretnu gustinu raspodele $\varphi_\Omega(\omega)$.

Rešenje

Očigledno je $\varphi_{Y(t)}(y) = 0$ za $|y| > a$.

Za $|y| < a$ imamo:

$$\varphi_{Y(t)}(y) = \sum_n \varphi_\Omega(\omega) \left|\frac{d\omega}{dy}\right|\Bigg|_{\omega=\omega_n}$$

gde se sumiranje vrši pos vim rešenjima jednačine $y = a \cdot \sin(\omega t)$. Takvih rešenja ima beskonačno mnogo I data su sa $\omega_n \in \left\{\frac{1}{t}\left(\arcsin\left(\frac{y}{a}\right) + 2n\pi\right)\right\} \cup \left\{\frac{1}{t}\left(\pi - \arcsin\left(\frac{y}{a}\right) + 2n\pi\right)\right\}$. Apsolutna vrednost izvoda inverznog preslikavanja je u svakoj od ovih tačaka ista i iznosi:

$$\left|\frac{d\omega}{dy}\right| = \frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

pa predstavlja konstantu za gornju sumu.

U svakom intervalu širine $\frac{2\pi}{t}$ se nalaze dva rešenja ω_n. Prema tome, ako sumu vrednosti $\varphi_\Omega(\omega_n)$ pomnožimo sa $\frac{\pi}{t}$ dobićemo pravougaonu aproksimaciju površine ispod krive $\varphi_\Omega(\omega)$. Kako $t \to \infty$ aproksimacija postaje sve tačnija jer se intervali sužavaju i dobijamo:

$$\frac{\pi}{t} \cdot \sum_n \varphi_\Omega(\omega_n) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\Omega(\omega) d\omega = 1.$$

Sledi da je gustina raspodele verovatnoće (prvog reda) slučajnog procesa $Y(t)$ asimptotski data sa:

$$\varphi_{Y(t)}(y) = \frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}} \cdot \frac{t}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\Omega(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-y^2}}.$$

Zadatak:

Izvor informacija bez memorije, X, ima simbole $\{1, 2, \ldots, n\}$, gde je $n \geq 2$, sa verovatnoćama $P[X = i] = p_i$, pri čemu je $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n$. Potrebno je da se promene dve od ovih verovatnoća tako da se entropija ovog izvora maksimalno poveća. Odrediti koje dve verovatnoće treba da se promene i na koje vrednosti.

Rešenje:

Entropija polaznog izvora je

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \operatorname{ld} p_i.$$

Neka se menjaju verovatnoće simbola a i b, gde je $a < b$, na vrednosti p'_a i p'_b, tim redom. Nova entropija je

$$H' = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq a,b}}^{n} p_i \operatorname{ld} p_i - p'_a \operatorname{ld} p'_a - p'_b \operatorname{ld} p'_b.$$

Neka je $p = p_a + p_b = p'_a + p'_b$. Promena entropije je

$$\begin{aligned}
&H' - H = \\
&\quad = -p'_a \operatorname{ld} p'_a - p'_b \operatorname{ld} p'_b + p_a \operatorname{ld} p_a + p_b \operatorname{ld} p_b = \\
&\quad = p\left(-\frac{p'_a}{p}\operatorname{ld}\frac{p'_a}{p} - \frac{p'_a}{p}\operatorname{ld} p - \frac{p'_b}{p}\operatorname{ld}\frac{p'_b}{p} - \frac{p'_b}{p}\operatorname{ld} p + \frac{p_a}{p}\operatorname{ld}\frac{p_a}{p} + \frac{p_a}{p}\operatorname{ld} p + \frac{p_b}{p}\operatorname{ld}\frac{p_b}{p} + \frac{p_b}{p}\operatorname{ld} p\right) = \\
&\quad = p\left(H\left(\frac{p'_a}{p}\right) - H\left(\frac{p_a}{p}\right)\right),
\end{aligned}$$

gde je

$$H(x) = -x \operatorname{ld} x - (1-x)\operatorname{ld}(1-x)$$

binarna entropijska funkcija. Ako se uvede

$$\alpha = \frac{p_a}{p} \quad \text{i} \quad \alpha' = \frac{p'_a}{p},$$

onda je

$$H' - H = p(H(\alpha') - H(\alpha)),$$

odakle se zaključuje da kada su odabrani simboli a i b, H' ima najveću vrednost ako je $\alpha' = 1/2$, tj. $p'_a = p'_b = p/2$. Tada je

$$H' - H = p(1 - H(\alpha)) = (p_a + p_b)\left(1 - H\left(\frac{p_a}{p_a + p_b}\right)\right)$$

Neposrednim izvođenjem se dobija

$$\frac{\partial(H' - H)}{\partial p_a} = 1 - \operatorname{ld}\left(1 + \frac{p_b}{p_a}\right),$$

odakle sledi da $H' - H$ monotono ne raste sa p_a, jer zbog toga što je $p_a \leq p_b$, važi

$$\frac{\partial(H' - H)}{\partial p_a} \leq 0.$$

To znači da se najveći porast entropije za bilo koji odabran simbol b, dobija za najmanju vrednost p_a, tj. za $a = 1$. Slično je

$$\frac{\partial(H' - H)}{\partial p_b} = 1 - \operatorname{ld}\left(1 + \frac{p_a}{p_b}\right),$$

pa $H' - H$ monotono ne opada sa p_b, jer je

$$\frac{\partial(H' - H)}{\partial p_b} \geq 0.$$

Najveći porast entropije se za bilo koji odabran simbol a, dobija kada je p_b najveće, tj. $b = n$. Konačno, da bi H' imalo najveću moguću vrednost, potrebno je da se promene verovatnoće simbola 1 i n na vrednosti

$$p'_1 = p'_n = \frac{p_1 + p_n}{2},$$

pri čemu je porast entropije

$$H' - H = (p_1 + p_n)\left(1 - H\left(\frac{p_1}{p_1 + p_n}\right)\right).$$