Analogne modulacije

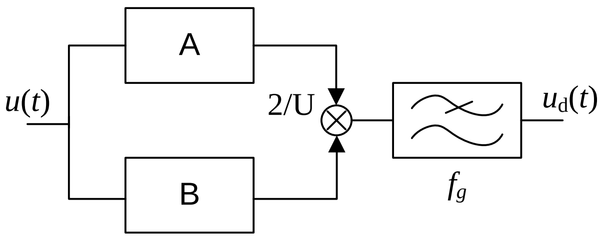
Na slici je prikazana blok šema kvadraturnog FM demodulatora. Na njegov ulaz dolazi FM signal amplitude U = 1 V, učestalosti f_c = 100 MHz i maksimalne devijacije učestlosti Δf = 300 kHz. Modulišući signal je prostoperiodičan učestalosti f_m = 50 kHz. Blok označen slovom **A** na slici predstavlja idealni Hilbertov transformator nultog grupnog kašnjenja. Frekvencijska karakteristika bloka označenog slovom **B** definisana je sa

$$H(f)=\begin{cases} f\exp\left(-j2\pi\tau\left(f-f_c\right)\right) & |f|< f_c-\Delta f \\ \exp\left(-j2\pi\tau\left(f-f_c\right)\right) & f_c-\Delta f\le|f|\le f_c+\Delta f \\ \exp\left(\alpha\left(f-\Delta f-f_c\right)-j2\pi\tau\left(f-f_c\right)\right) & f_c+\Delta f<|f| \end{cases}$$ gde je α = -0.5 i τ = 30 ns

Granična učestalost idealnog NF filtra nultog grupnog kašnjenja iznosi f_g = 200 kHz.

a) Odrediti izgled demodulisanog signala?

b) Odrediti faktor harmonijskog izobličenja 3 reda. Koristiti aproksimaciju $\sin x = x-\frac{1}{6}x^3$ za $x<<1$



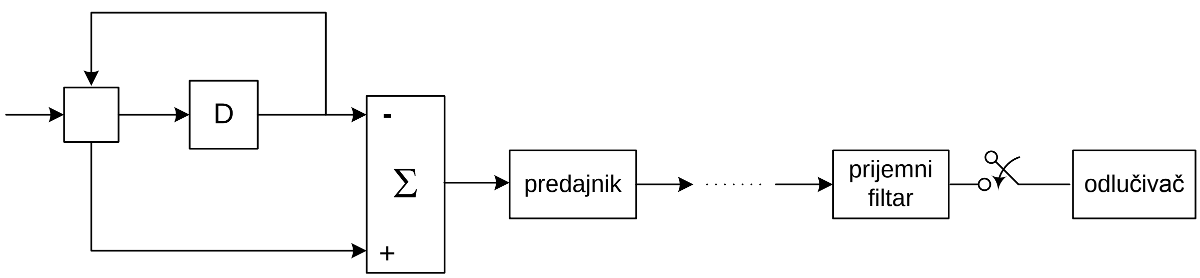
DIGITALNE TELEKOMUNIKACIJE

Na slici je prikazan sistem za prenos digitalnih signala u osnovnom opsegu u kome se koristi diferencijalno kodovanje sa prekodovanjem. Izvor koji emituje informacione bite je bez memorije, sa apriornim verovatnoćoma emitovanja pojedinih simbola $P[i_k = 0] = p$ i $P[i_k = 1] = 1 - p$. Predajnik emituje digitalni signal oblika $s(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k h(t - kT)$, pri čemu elementarni impuls zadovoljava prvi Nikvistov kriterijum i važi $h(0) = 1$, a sa T je označeno trajanje signalizacionog intervala. Tokom prenosa se signalu superponira beli Gausov šum. Prijemni filtar propušta emitovani signal bez izobličenja i ograničava snagu belog Gausovog šuma na svom ulazu.

a) Odrediti vrednosti koje mogu imati informacioni simboli b_k, kao i verovatnoće pojedinih vrednosti kada $k \to \infty$. Pretpostavka je da je početna vrednost $a_{-1} = 0$.

b) Ako se odlučivanje u svakom signalizacionom intervalu vrši na osnovu odbirka digitalnog signala, odrediti način dekodovanja u slučaju kada se uticaj šuma može zanemariti.

c) Odrediti optimalne pragove odlučivanja koji će minimizovati verovatnoću greške (za apriorne verovatnoće informacionih simbola b_k uzeti vrednosti dobijene pod a).



Rešenje:

a) (50%)

Važi:

$$b_k = a_k - a_{k-1} = i_k \oplus a_{k-1} - a_{k-1} = i_k + a_{k-1} - 2i_k a_{k-1} - a_{k-1} = i_k(1 - 2a_{k-1})$$

odakle sledi:

$b_k \in \{-1,0,1\}$.

Verovatnoće pojedinih vrednosti su:

$$P[b_k = 0] = P[i_k = 0] = p$$

$$P[b_k = 1] = P[i_k = 1, a_{k-1} = 0] = P[i_k = 1]P[a_{k-1} = 0] = (1-p)\,P[a_{k-1} = 0]$$

$$P[b_k = -1] = P[i_k = 1, a_{k-1} = 1] = (1-p)\,P[a_{k-1} = 1].$$

Potrebno je odrediti verovatnoće $P[a_{k-1} = 0]$ i $P[a_{k-1} = 1]$. Važi:

$$a_{k-1} = i_{k-1} \oplus a_{k-2} = i_{k-1} \oplus i_{k-2} \oplus a_{k-3} = \dots\dots. = i_{k-1} \oplus i_{k-2} \oplus i_{k-3} \oplus \cdots \oplus i_0 \oplus a_{-1}$$

Pošto je $a_{-1} = 0$, važi:

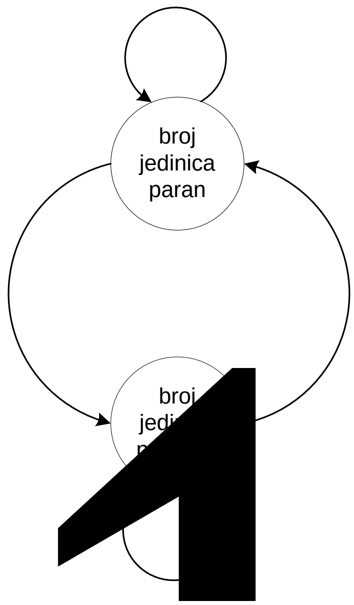
$$a_{k-1} = i_{k-1} \oplus i_{k-2} \oplus i_{k-3} \oplus \cdots \oplus i_0$$

Važi:

$$P[a_{k-1} = 0] = P[verovatnoća\ da\ je\ broj\ jedinica\ u\ nizu\ informacionih\ bita\ paran]$$

$$P[a_{k-1} = 0] = P[verovatnoća\ da\ je\ broj\ jedinica\ u\ nizu\ informacionih\ bita\ neparan].$$

Ove verovatnoće možemo izračunati ako posmatramo sledeći diskretni Markovljev lanac:



Matrica prelaza je:

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$

a stacionarne verovatnoće stanja sistema se dobijaju rešavanjem jednačine:

$$\pi = \pi P$$

gde je $\pi = [P[\,paran]\ P[neparan]]$.

Rešavanjem se dobija da je:

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Iz ovoga sledi da je, kada $k \to \infty$:

$$P[b_k = 1] = \frac{(1-p)}{2}$$

$$P[b_k = -1] = \frac{(1-p)}{2}$$

Takođe, može da se pokaže da je, u opšem slučaju, indukcijom ili razvojem binomnog obrasca:

$P[a_{k-1} = 0] = \frac{1+(2p-1)^k}{2}$ (ovo nisam stigao da proverim)

$P[a_{k-1} = 1] = \frac{1-(2p-1)^k}{2}$(ovo nisam stigao da proverim)

Odakle slede iste vrednosti za verovatnoće $P[b_k = 1]$i $P[b_k = -1]$, kada $k \to \infty$.

b) (5%)

Na osnovu gore navedeng jasno je da se dekodovanje vrši na sledeći način:

$$\hat{i}_k = \begin{cases} 0 & \hat{b}_k = 0 \\ 1 & \hat{b}_k = \pm 1 \end{cases}$$

c) (45%)

Minimizaciju verovatnoće greške obezbeđuje MAP kriterijum. Vrednosti dobijene odabiranjem će se porediti sa pragovima. Pošto su vrednosti 1 i -1 jednakoverovatne, posmatraćemo samo prag za odlučivanje između vrednosti 0 i 1.

Pošto je zadovoljen I NK, za odabranu vrednosti važi

$$\hat{b}_k = b_k + n(kT)$$

gde je $n(kT)$ odbirak Gausovog šuma.

Važi:

$$P[b_k = 0/\hat{b}_k] = \frac{p[\hat{b}_k/b_k = 0]P[b_k = 0]}{p[\hat{b}_k]} = \frac{p\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}e^{-\frac{b_k^2}{2\sigma_n^2}}}{p[\hat{b}_k]}$$

$$P[b_k = 1/\hat{b}_k] = \frac{p[\hat{b}_k/b_k = 1]P[b_k = 1]}{p[\hat{b}_k]} = \frac{\frac{(1-p)}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}e^{-\frac{(b_k-1)^2}{2\sigma_n^2}}}{p[\hat{b}_k]}$$

Za “gornji” prag odlučivanja važi:

$$P[b_k = 0/U_g] = P[b_k = 1/U_g]$$

pa se posle niza elementarnih transformacija dobija:

$$U_g = \frac{1}{2} - \sigma_n^2 \ln\frac{1-p}{2p}$$

Na sličan način se dobija da je donji prag:

$$U_d = -\frac{1}{2} + \sigma_n^2 \ln\frac{1-p}{2p}$$

Signali i sistemi

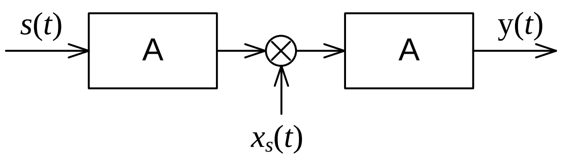
Odrediti odziv sistema $y(t)$ sa slike 1 na signal $s(t)$. Signal $s(t)$ je periodičan signal sa periodom T. Izgled osnovne periode signala $s(t)$ je dat na slici 2.

Frekvencijska karakteristika bloka sa oznakom **A** je data izrazom

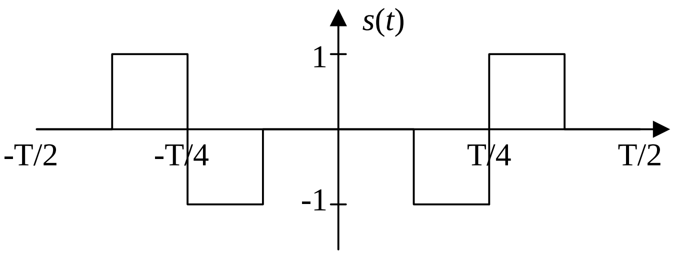
$$H(f)=\begin{cases}\exp(-j2\pi\tau f) & |f|\le \dfrac{5}{T}\\ -0.5\cdot(Tf-7)\exp(-j2\pi\tau f) & \dfrac{5}{T}<|f|\le\dfrac{7}{T}\\ 0 & \dfrac{7}{T}<|f|\end{cases}\quad \text{gde je } \tau = T/2.$$

Signal $x_s(t)$ je dat izrazom

$x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(t-nT/6)$, gde je $u(t)$ pravougaoni impuls dat izrazom $u(t)=\begin{cases}2 & |t|\le T/24\\ 0 & T/24<|t|\end{cases}$



Slika 1



Slika 2

STATISTIČKA TEORIJA TELEKOMUNIKACIJA

Zrnasti šum definisan je kao slučajni proces $s(t)$ oblika

$$s(t) = \sum_i h(t - t_i)$$

gde su t_i slučajne tačke u vremenu uniformne gustine λ, a $h(t)$ je realan deterministički signal. Pokazati da važe sledeće relacije za srednju vrednost i varijansu slučajne promenljive $s(t)$:

$$E\{s(t)\} = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) d\alpha \qquad \sigma_{s(t)}^2 = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\alpha) d\alpha$$

REŠENJE:

Zrnasti šum možemo dobiti na izlazu linearnog vremenski-nepromenljivog sistema sa impulsnim odzivom $h(t)$, ako se na ulaz ovog sistema dovede slučajni proces Poasonovih impulsa

$$z(t) = \sum_i \delta(t - t_i)$$

gde su trenuci t_i potpuno slučajni i imaju uniformnu gustinu λ.

.................(10 poena)

Srednja vrednost i autokorelacija slučajnog procesa Poasonovih impulsa $z(t)$ je

$$E\{z(t)\} = \lambda \qquad R_{zz}(\tau) = \lambda^2 + \lambda\delta(\tau)$$

(Dokaz: Ovaj proces je izvod Poasonovog procesa $x(t)$ koji ima nezavisne priraštaje koji su raspodeljeni po Poasonovoj raspodeli $P\{x(t_2) - x(t_1) = k\} = e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \dfrac{(\lambda(t_2 - t_1))^k}{k!}, t_2 > t_1, k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ i $x(0) = 0$. Za Poasonov proces važi $E\{x(t)\} = E\{x(t) - x(0)\} = \lambda t$ i

$R_{xx}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min(t_1, t_2)$.

Kako je $z(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$, to je $E\{z(t)\} = \dfrac{dE\{x(t)\}}{dt} = \lambda$, i

$R_{zz}(t_1, t_2) = \dfrac{\partial^2 R_{xx}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \lambda^2 + \lambda\delta(t_1 - t_2)$)

..............(20 poena)

Kako je $s(t) = z(t) * h(t)$, to sledi

$$\eta_{s(t)} = E\{s(t)\} = E\{z(t) * h(t)\} = E\{\int_{-\infty}^{\infty} z(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{z(t-\alpha)\}h(\alpha)d\alpha = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)d\alpha$$

.... (20 poena)

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\alpha)h(t-\alpha)d\alpha \;\Rightarrow\; z(t+\tau)s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t+\tau)z(\alpha)h(t-\alpha)d\alpha \;\Rightarrow$$

$$R_{zs}(\tau) = E\{z(t+\tau)s(t)\} = E\{\int_{-\infty}^{\infty} z(t+\tau)z(\alpha)h(t-\alpha)d\alpha\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{z(t+\tau)z(\alpha)\}h(t-\alpha)d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_{zz}(t+\tau-\alpha)h(t-\alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda^2 + \lambda\delta(t+\tau-\alpha))h(t-\alpha)d\alpha = \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)d\beta + \lambda h(-\tau) =$$

$$= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)d\alpha + \lambda h(-\tau)$$

$$s(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\alpha)h(t+\tau-\alpha)d\alpha \;\Rightarrow\; s(t+\tau)s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\alpha)s(t)h(t+\tau-\alpha)d\alpha \;\Rightarrow$$

$$R_{ss}(\tau) = E\{s(t+\tau)s(t)\} = E\{\int_{-\infty}^{\infty} z(\alpha)s(t)h(t+\tau-\alpha)d\alpha\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{z(\alpha)s(t)\}h(t+\tau-\alpha)d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_{zs}(\alpha-t)h(t+\tau-\alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} R_{zs}(\tau-\beta)h(\beta)d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} [\lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)d\alpha + \lambda h(\beta-\tau)]h(\beta)d\beta =$$

$$= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)d\beta + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta-\tau)h(\beta)d\beta = \eta_{s(t)}^2 + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\alpha+\tau)d\alpha$$

Kako je $\sigma_{s(t)}^2 = E\{s^2(t)\} - E^2\{s(t)\}$ to sledi

$$\sigma_{s(t)}^2 = R_{ss}(0) - \eta_{s(t)}^2 = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\alpha)d\alpha$$

.... (50 poena)

Zadatak:

U posudi se nalazi 8 kuglica obeleženih brojevima $1 \div 8$, koje se razlikuju jedino po broju. Na slučaj se bez vraćanja izvlači 5 kuglica, čiji brojevi su, kada se poređaju u rastući poredak, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5. Izračunati $I(X_3, X_4)$.

Rešenje:

S obzirom na nametnuto ograničenje, važi $3 \leq X_3 < X_4 \leq 7$. Verovatnoće pojedinih parova ovih slučajnih promenljivih su

$$P[X_3 = x_3, X_4 = x_4] = \frac{\binom{x_3-1}{2}\binom{8-x_4}{1}}{\binom{8}{5}},$$

jer za određene vrednosti x_3 i x_4, par (X_1, X_2) može da se izvuče na $\binom{x_3-1}{2}$ načina, promenljiva X_5 na $\binom{8-x_4}{1}$ načina, a sve kombinacije koje mogu da se izvuku su jednako verovatne i ima ih $\binom{8}{5}$. Odavde je

$$\begin{aligned}
&P[X_3 = 3, X_4 = 4] = \frac{4}{56}, && \\
&P[X_3 = 3, X_4 = 5] = \frac{3}{56}, && P[X_3 = 4, X_4 = 5] = \frac{9}{56}, \\
&P[X_3 = 3, X_4 = 6] = \frac{2}{56}, && P[X_3 = 4, X_4 = 6] = \frac{6}{56}, \\
&P[X_3 = 3, X_4 = 7] = \frac{1}{56}, && P[X_3 = 4, X_4 = 7] = \frac{3}{56}, \\
& && \\
&P[X_3 = 5, X_4 = 6] = \frac{12}{56}, && \\
&P[X_3 = 5, X_4 = 7] = \frac{6}{56}, && P[X_3 = 6, X_4 = 7] = \frac{10}{56}
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
&P[X_3 = 3] = \frac{10}{56}, && P[X_4 = 4] = \frac{4}{56}, \\
&P[X_3 = 4] = \frac{18}{56}, && P[X_4 = 5] = \frac{12}{56}, \\
&P[X_3 = 5] = \frac{18}{56}, && P[X_4 = 6] = \frac{20}{56}, \\
&P[X_3 = 6] = \frac{10}{56}, && P[X_4 = 7] = \frac{20}{56}.
\end{aligned}$$

Kako je

$$I(X_3, X_4) = \sum_{x_3=3}^{6} \sum_{x_4=x_3+1}^{7} P[X_3 = x_3, X_4 = x_4] \operatorname{ld} \frac{P[X_3 = x_3, X_4 = x_4]}{P[X_3 = x_3]P[X_4 = x_4]},$$

zamenom prethodnih verovatnoća se dobija

$$I(X_3, X_4) = 1 - \frac{9}{14} \operatorname{ld} 3 - \frac{25}{28} \operatorname{ld} 5 + \operatorname{ld} 7 \approx 0.7153.$$